Exercices de révision

Exercices de révision

1) Manipulation d'événements

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.

1. Exprimer les événements suivants à l'aide de A et B :
   (a) $A \setminus B$
   (b) $(A \cup B)^c$
   (c) $(A \cap B)^c$
2. Montrer que :
$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$
   et que cette union est disjointe.
3. En déduire une relation entre $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cap \bar{B})$.

2) Probabilités conditionnelles, indépendance, formule des probabilités totales

Une maladie touche 5% de la population. Un test de dépistage vérifie :

$$\mathbb{P}(T = 1 \mid M = 1) = 0.9, \qquad \mathbb{P}(T = 1 \mid M = 0) = 0.1$$

en notant $T = 1$ le résultat positif du test et $M = 1$ la présence de la maladie.

1. Calculer $\mathbb{P}(T = 1)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(M = 1 \mid T = 1)$.
3. Les événements $\{T = 1\}$ et $\{M = 1\}$ sont-ils indépendants ?
4. Donner une condition sur $\mathbb{P}(T = 1 \mid M = 0)$ pour que T et M soient indépendants.

3) Estimateur discret

On considère un échantillon $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$.

On définit :

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

1. Montrer que $\hat{p}_n$ est un estimateur sans biais de p.
2. Calculer $\mathbb{V}(\hat{p}_n)$.
3. L'estimateur est-il convergent ? (justifier brièvement)

4) Estimateur continu (loi normale)

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\mu \in \mathbb{R}$ est inconnu et $\sigma^2 > 0$ est connu.

On considère l'estimateur :

$$\hat{\mu}_n = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

1. Donner la loi de $\bar{X}_n$.
2. Calculer $\mathbb{E}(\hat{\mu}_n)$ et $\mathbb{V}(\hat{\mu}_n)$.
3. L'estimateur est-il sans biais ? convergent ?
4. (Hors programme pour l'examen) Donner un intervalle de confiance exact à 95% pour μ.
5. (Hors programme pour l'examen) On définit :

$$T_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

   Quelle est la loi de T_n ? Retrouver l'intervalle de confiance précédent.

5) Calculs sur des lois continues

Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $Y = X^2$.

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
4. Calculer $\mathbb{V}(Y)$.
5. Généraliser : calculer $\mathbb{E}(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

6) Calculs sur des lois discrètes

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y = X^2$.

1. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2. Calculer $\mathbb{V}(Y)$.
3. Même question si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.