

# Probabilités, modélisation et statistique

## Chapitre 4 - Convergence des variables aléatoires

Raphaël Benerradi

Contenu pédagogique : Gwladys Toulemonde, Chloé Serre-Combe et Raphaël Benerradi

Polytech Montpellier - DevOps3 - Semestre 6

Année 2025-2026

# Convergence $L^2$

Définition : convergence  $L^2$  (ou en moyenne quadratique)

On dit qu'une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en norme  $L^2$**  (ou **en moyenne quadratique**) vers une variable aléatoire  $X$  si :

$$\mathbb{E} [(X_n - X)^2] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Dans ce cas, on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} X$ .

Si on veut réécrire dans le détail cette définition :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,$$

$$\sum_i (x_{n,i} - x_i)^2 \mathbb{P}(X_n = x_{n,i}) < \epsilon \quad \text{si } X_n, X \text{ discrètes}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (x_n - x)^2 f_{X_n}(x_n) dx < \epsilon \quad \text{si } X_n, X \text{ continues}$$

# Convergence en probabilité

## Définition : convergence en probabilité

On dit qu'une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en probabilité** vers une variable aléatoire  $X$  si :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Dans ce cas, on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$ .

Si on veut réécrire dans le détail cette définition :

$$\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,$$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) < \delta$$

# Convergence en loi

## Définition : convergence en loi

On dit qu'une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en loi** vers une variable aléatoire  $X$  si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_X(x)$$

Dans ce cas, on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ .

**En particulier**, cette définition est équivalente aux propositions suivantes :

- Si  $X_n$  et  $X$  sont discrètes :  $\forall i \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{P}(X = i)$ .
- Si  $X_n$  et  $X$  admettent une densité :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{X_n}(x) = f_X(x)$ .

# Lien entre les convergences

**Convergence  $L^2 \implies$  Convergence en probabilité  $\implies$  Convergence en loi**

**Remarque :** Les réciproques sont fausses en général.

- Convergence en probabilité  $\not\Rightarrow$  Convergence  $L^2$   
💡 Considérer  $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$  et la suite  $X_n = \sqrt{n} \mathbb{1}_{\{Y \leq \frac{1}{n}\}}$ .
- Convergence en loi  $\not\Rightarrow$  Convergence en probabilité  
💡 Considérer  $X \sim \mathcal{B}(1/2)$  et la suite  $X_n = 1 - X$ .

# Inégalités classiques

## Inégalité de Markov (un de ses corollaires)

Soient  $X$  une variable aléatoire et  $g$  une fonction croissante positive définie sur  $X(\Omega)$ . Alors, pour tout  $\epsilon \in X(\Omega)$  tel que  $g(\epsilon) > 0$  :

$$\mathbb{P}(X \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(\epsilon)}$$

## Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit  $X$  une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\epsilon^2}$$

Ces inégalités sont utiles pour contrôler des quantités aléatoires. Elles permettent notamment de prouver la loi des grands nombres.

# Loi des grands nombres

## Théorème : loi (faible) des grands nombres

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, admettant une espérance  $\mu$ . Alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu$$

*i.e. la moyenne empirique converge en probabilité vers l'espérance.*

Si de plus, les  $X_i$  admettent une variance finie, alors on a même convergence  $L^2$  :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \mu$$

# Théorème central limite

## Théorème : théorème central limite

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, admettant une espérance  $\mu$  et une variance  $\sigma^2 > 0$ . Notons  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  la moyenne empirique. Alors :

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

*i.e. pour  $n$  grand, la dispersion des moyennes empiriques autour de  $\mu$  est de l'ordre de  $\sigma/\sqrt{n}$  avec une distribution normale.*