Examen final : Probabilités, modélisation et statistique

Polytech Montpellier – DevOps3 – Semestre 6

Année 2025–2026

01 avril 2026

Durée : 1h30

Seule une feuille de notes A4 manuscrite est autorisée. Aucun autre document n'est autorisé. La calculatrice n'est pas autorisée. On attachera une attention particulière à la rédaction et à la clarté des réponses. Les réponses non argumentées, même correctes, ne seront pas prises en compte. Un début de réponse qui n'a pas abouti sera valorisé s'il est partiellement correct ou pertinent.

Exercice 1 : Modèle d'occupation de sites

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

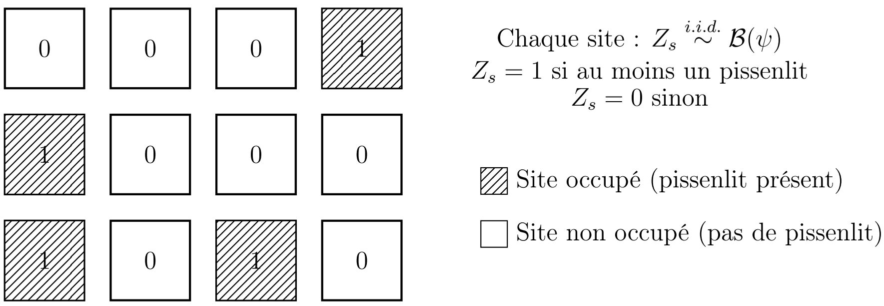
PARTIE A – Questions préliminaires (3 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$.

1. (a) Exprimer $\bar{A} \cap B$ en fonction de B et $A \cap B$. *(Faites aussi un dessin.)*
   (b) Exprimer $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$ en fonction de $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
   (c) En déduire une expression de $\mathbb{P}(\bar{A} \mid B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A \mid B)$.

PARTIE B – Probabilités conditionnelles et indépendance (6 points)

On cherche à étudier la couverture du pissenlit sur une prairie. Pour cela, on propose de diviser la prairie en n carrés de même surface, appelés sites. Pour chaque site, on considère qu'il y a une probabilité $0 < \psi < 1$ qu'au moins un pissenlit soit présent dans le site. Pour chaque site $s \in \{1, \ldots, n\}$, on note Z_s la variable aléatoire qui vaut 1 si le site s est occupé (c'est-à-dire s'il y a au moins un pissenlit) et 0 sinon. On suppose que les $Z_1, \ldots, Z_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre ψ, i.e. $\mathbb{P}(Z_s = 1) = \psi$ et $\mathbb{P}(Z_s = 0) = 1 - \psi$.



Dans le but d'estimer ψ, on propose une campagne de relevés. Des observateurs vont visiter les sites pour essayer de détecter des pissenlits. Les observateurs ne sont pas parfaits : s'il y a un pissenlit dans le site, ils le détectent avec une probabilité $0 < p < 1$ (qui est la même pour tous les sites et toutes les visites). S'il n'y a pas de pissenlit, ils ne vont jamais détecter sa présence. Chaque site est visité k fois. Par exemple, si $k = 4$, la séquence de visites du site en bas à gauche de la figure pourraient être $1, 0, 1, 0$, celle du site en haut à droite pourrait être $0, 0, 0, 0$, et celle du site en haut à gauche ne peut être que $0, 0, 0, 0$.

Pour chaque site s et chaque visite $j \in \{1, \ldots, k\}$, on note $Y_{s,j}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si un pissenlit est détecté lors de la visite j du site s, et 0 sinon.

En particulier, on a :

$\mathbb{P}(Y_{s,j} = 1 \mid Z_s = 1) = p$ (si le site est occupé, on détecte un pissenlit avec probabilité p)

$\mathbb{P}(Y_{s,j} = 1 \mid Z_s = 0) = 0$ (si le site est non occupé, on ne détecte pas de pissenlit)

2. Exprimer $\mathbb{P}(Y_{s,j} = 0 \mid Z_s = 1)$ et $\mathbb{P}(Y_{s,j} = 0 \mid Z_s = 0)$ en fonction de p. *(Utiliser les questions préliminaires.)*

3. Utiliser la formule des probabilités totales pour calculer $\mathbb{P}(Y_{s,j} = 1)$ en fonction de ψ et p. Exprimer $\mathbb{P}(Y_{s,j} = 0)$ en fonction de ψ et p.

On suppose que les visites sont indépendantes *conditionnellement à l'état d'occupation du site*. Autrement dit, pour un site s, pour deux visites $j \neq j'$, et pour $x, y, z \in \{0, 1\}$, on a :

$$\mathbb{P}(\{Y_{s,j} = x\} \cap \{Y_{s,j'} = y\} \mid Z_s = z) = \mathbb{P}(Y_{s,j} = x \mid Z_s = z) \times \mathbb{P}(Y_{s,j'} = y \mid Z_s = z).$$

4. On considère deux visites d'un même site s, c'est-à-dire les variables $Y_{s,1}$ et $Y_{s,2}$.

   (a) Exprimer $\mathbb{P}(\{Y_{s,1} = 1\} \cap \{Y_{s,2} = 1\})$ uniquement en fonction des $\mathbb{P}(Y_{s,\ldots} = 1 \mid Z_s = \ldots)$ et des $\mathbb{P}(Z_s = \ldots)$.

   (b) Prouver que $\mathbb{P}(\{Y_{s,1} = 1\} \cap \{Y_{s,2} = 1\}) = p^2\, \psi$.

5. D'après les questions précédentes, les événements $\{Y_{s,1} = 1\}$ et $\{Y_{s,2} = 1\}$ sont-ils indépendants ?

PARTIE C – Estimateur (4 points)

Pour chaque site s, on note W_s la variable aléatoire qui vaut 1 si au moins une détection de pissenlits a eu lieu sur le site s, et 0 sinon. On admet que les W_s sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $\psi\left(1 - (1-p)^k\right)$. Pour simplifier les calculs, on note $q = 1 - (1-p)^k$, donc $W_s \sim \mathcal{B}(\psi q)$. Notons $W = \sum_{s=1}^{n} W_s$ le nombre de sites pour lesquels au moins une détection a eu lieu.

6. Quelle est la loi de W ? *(Justifier par une phrase.)*

7. Exprimer $\mathbb{E}(W)$ en fonction de ψ, q et n.

8. A l'issu de la campagne d'échantillonnage, on pourra connaître le nombre de sites avec au moins une détection. On suppose que le taux de détection p est connu, donc q est connu.
   Proposer un estimateur $\hat{\psi}$ de ψ (pertinent) en fonction de W, q et n. Quel est son biais ? *(Justifier votre estimateur.)*

9. Calculer la variance de cet estimateur en fonction de ψ, q et n.

Pour info : Ma thèse porte en partie sur l'étude de ces modèles, notamment l'estimation de ψ et d avec une formulation plus générale du modèle.

Exercice 2 : Production d'une éolienne – (7 points)

Les 3 questions peuvent être traitées indépendamment.

On modélise la vitesse du vent V (en km/h) par une variable aléatoire continue suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

La fonction de répartition de V est donnée par : $F_V(v) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda v} & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La densité de V est donnée par : $f_V(v) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda v} & \text{si } v \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. D'après EDF : "Pour pouvoir démarrer, une éolienne nécessite une vitesse de vent minimale d'environ 15 km/h. Pour des questions de sécurité, l'éolienne s'arrête automatiquement de fonctionner lorsque le vent dépasse 90 km/h." Exprimer la probabilité que l'éolienne soit en fonctionnement (c'est-à-dire que V soit compris entre 15 et 90 km/h) en fonction de λ.

Dans la suite, on suppose que l'éolienne est en fonctionnement quelque soit la vitesse du vent. On suppose que la puissance maximum récupérable par l'éolienne est donnée par la loi de Betz : $P = \frac{1}{2}\rho S V^3$, où ρ est la masse volumique de l'air et S est la surface balayée par les pales de l'éolienne. Dans la suite on prendra :

$$P = cV^3,$$

avec $c > 0$ un constante. Typiquement, pour une éolienne avec des pales de 40 m de long, on prendra $c \approx 64.7$ W/(km/h)^3.

2. Soit $x \geq 0$.
   (a) Réécrire l'événement $\{P \leq x\}$ en un événement de la forme $\{V \leq \dots\}$.
   (b) En déduire une expression de $F_P(x) = \mathbb{P}(P \leq x)$ pour $x \geq 0$ en fonction de la fonction de répartition F_V de la variable V, de x, et de c.
   (c) En déduire la densité $f_P(x)$ de P.
   (On rappelle que la densité est la dérivée de la fonction de répartition. Et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $g : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et de dérivée $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.)

Notons $I_k = \int_0^{+\infty} v^k e^{-\lambda v} dv$ pour $k \in \mathbb{N}$. On admet que pour tout $k \geq 1$, $I_k = \frac{k}{\lambda} I_{k-1}$ (intégration par parties), et que $I_0 = \frac{1}{\lambda}$ (calcul de l'intégrale).

3. (a) Utiliser le théorème de transfert pour calculer $\mathbb{E}(P)$ en fonction de c et de λ.
   (b) *Bonus* – Pour $\lambda = 0.05$, quelle est la puissance moyenne récupérable par l'éolienne *(à peu près, faites des grosses approximations dans les calculs pour donner un ordre de grandeur)* ? Donner d'autres ordres de grandeur pour interpréter le résultat.

Bonus (uniquement si vous avez tenté tout le reste) – 3 points

Trouver une variable aléatoire réelle (discrète ou continue) ayant une espérance infinie. L'expliciter proprement (sa loi et/ou un exemple de la vraie vie modélisé par cette variable aléatoire). Justifier que la loi est bien définie et que l'espérance est infinie.

Indication : Il en existe plein, mais par exemple on peut penser à un jeu basé sur du pile ou face (voir le paradoxe de Saint-Pétersbourg).

Pas bonus (uniquement si vous en avez vraiment marre)

	5							
		4		1	7			9
8			6		3		2	
			2				5	
	4							1
						7		
7		5	8			1		4
	8			6		5		
	1					3	6	

ANNEXE : Rappels lois usuelles

Loi de Bernoulli : $\mathcal{B}(p)$, $p \in [0,1]$.

$$\mathbb{P}(X=1) = p, \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p, \qquad \mathbb{E}[X] = p, \qquad \mathbb{V}[X] = p(1-p)$$

Loi binomiale : $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$.

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad \mathbb{E}[X] = np, \qquad \mathbb{V}[X] = np(1-p)$$

Loi exponentielle : $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$