

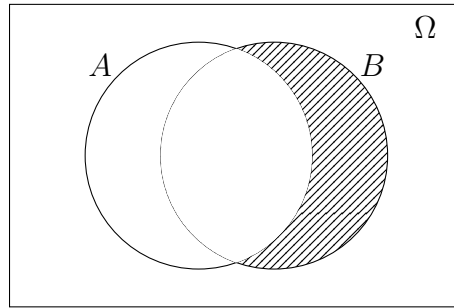
# Correction Examen 2025-2026

## Exercice 1 – Modèle d'occupation de sites

### Partie A

1. (a) On a :

$$\bar{A} \cap B = B \setminus (A \cap B).$$



(b) Donc :

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(c) Ainsi,

$$\mathbb{P}(\bar{A} | B) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \mathbb{P}(A | B).$$

### Partie B

2. En prenant  $A = \{Y_{s,j} = 1\}$  et  $B = \{Z_s = 1\}$ , on a :

$$\mathbb{P}(Y_{s,j} = 0 | Z_s = 1) = \mathbb{P}(\overline{\{Y_{s,j} = 1\}} | \{Z_s = 1\}) = 1 - \mathbb{P}(Y_{s,j} = 1 | Z_s = 1) = 1 - p.$$

De même, en prenant  $A = \{Y_{s,j} = 1\}$  et  $B = \{Z_s = 0\}$ , on a :

$$\mathbb{P}(Y_{s,j} = 0 | Z_s = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_{s,j} = 1 | Z_s = 0) = 1 - 0 = 1.$$

3. Formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y_{s,j} = 1) = \mathbb{P}(Y_{s,j} = 1 | Z_s = 1) \times \mathbb{P}(Z_s = 1) + \mathbb{P}(Y_{s,j} = 1 | Z_s = 0) \times \mathbb{P}(Z_s = 0).$$

Donc :

$$\mathbb{P}(Y_{s,j} = 1) = p \times \psi + 0 \times (1 - \psi) = p\psi.$$

On peut faire de même pour  $Y_{s,j} = 0$ , ou utiliser la relation de complémentarité :

$$\mathbb{P}(Y_{s,j} = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_{s,j} = 1) = 1 - p\psi.$$

4. On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{s,1} = 1 \cap Y_{s,2} = 1) &= \mathbb{P}(Y_{s,1} = 1 \cap Y_{s,2} = 1 \mid Z_s = 1)\mathbb{P}(Z_s = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(Y_{s,1} = 1 \cap Y_{s,2} = 1 \mid Z_s = 0)\mathbb{P}(Z_s = 0)\end{aligned}\quad (\star)$$

D'après l'indépendance conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{s,1} = 1 \cap Y_{s,2} = 1 \mid Z_s = 1) &= \mathbb{P}(Y_{s,1} = 1 \mid Z_s = 1) \times \mathbb{P}(Y_{s,2} = 1 \mid Z_s = 1) \\ &= p \times p \quad \text{d'après l'énoncé} \\ &= p^2\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{s,1} = 1 \cap Y_{s,2} = 1 \mid Z_s = 0) &= \mathbb{P}(Y_{s,1} = 1 \mid Z_s = 0) \times \mathbb{P}(Y_{s,2} = 1 \mid Z_s = 0) \\ &= 0 \times 0 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ &= 0\end{aligned}$$

On avait aussi :

$$\mathbb{P}(Z_s = 1) = \psi, \quad \mathbb{P}(Z_s = 0) = 1 - \psi.$$

En remplaçant dans l'expression  $(\star)$  ci-dessus, on trouve :

$$\mathbb{P}(Y_{s,1} = 1 \cap Y_{s,2} = 1) = p^2\psi + 0 \times (1 - \psi) = p^2\psi.$$

5. On avait trouvé :

- $\mathbb{P}(Y_{s,1} = 1) = p\psi,$
- $\mathbb{P}(Y_{s,2} = 1) = p\psi,$
- $\mathbb{P}(Y_{s,1} = 1 \cap Y_{s,2} = 1) = p^2\psi.$

L'énoncé suppose que  $p > 0$  et  $\psi > 0$ . Ainsi, on a :

$$\mathbb{P}(Y_{s,1} = 1 \cap Y_{s,2} = 1) \neq \mathbb{P}(Y_{s,1} = 1) \times \mathbb{P}(Y_{s,2} = 1)$$

Les événements  $\{Y_{s,1} = 1\}$  et  $\{Y_{s,2} = 1\}$  ne sont donc pas indépendants.

## Partie C

6.  $W$  suit une loi binomiale comme somme de  $n$  variables de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées, chacune de paramètre  $\psi q$ .

$$W \sim \mathcal{B}(n, \psi q).$$

7. D'après la formule de l'espérance pour une loi binomiale, on a :

$$\mathbb{E}[W] = n \psi q.$$

8. On en déduit que  $\psi = \frac{\mathbb{E}[W]}{nq} = \mathbb{E}\left[\frac{W}{nq}\right]$ .

Posons :

$$\hat{\psi} = \frac{W}{nq}$$

On a  $\text{Bias}(\hat{\psi}) = \mathbb{E}[\hat{\psi}] - \psi = \mathbb{E}\left[\frac{W}{nq}\right] - \psi = 0$ .

On a alors construit un estimateur  $\hat{\psi}$  de  $\psi$  qui est sans biais.

9. Variance :

$$\mathbb{V}[\hat{\psi}] = \mathbb{V}\left[\frac{W}{nq}\right] = \frac{1}{(nq)^2} \mathbb{V}[W]$$

$W$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\psi q$ , donc :

$$\mathbb{V}[W] = n \times \psi q \times (1 - \psi q).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\hat{\psi}] &= \frac{1}{(nq)^2} \times n \psi q (1 - \psi q) \\ &= \frac{\psi (1 - \psi q)}{nq}. \end{aligned}$$

## Exercice 2 – Production d'une éolienne

1. On utilise la fonction de répartition de  $V$  :

$$\mathbb{P}(15 \leq V \leq 90) = F_V(90) - F_V(15) = (1 - e^{-\lambda \times 90}) - (1 - e^{-\lambda \times 15}) = e^{-15\lambda} - e^{-90\lambda}.$$

2. (a)  $\{P \leq x\} = \{cV^3 \leq x\} = \{V^3 \leq \frac{x}{c}\} = \left\{V \leq \left(\frac{x}{c}\right)^{1/3}\right\}$ .

(b)  $F_P(x) = \mathbb{P}(P \leq x) = \mathbb{P}\left(V \leq \left(\frac{x}{c}\right)^{1/3}\right) = F_V\left(\left(\frac{x}{c}\right)^{1/3}\right)$ .

(c) On dérive  $F_P$  pour trouver la densité de  $P$  :

$$f_P(x) = F'_P(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_V\left(\left(\frac{x}{c}\right)^{1/3}\right) = F'_V\left(\left(\frac{x}{c}\right)^{1/3}\right) \times \frac{1}{c^{1/3}} \times \frac{1}{3} x^{1/3-1}$$

$$f_P(x) = \frac{1}{3c^{1/3}x^{2/3}} \times f_V\left(\left(\frac{x}{c}\right)^{1/3}\right).$$

Donc, pour  $x \geq 0$  :

$$f_P(x) = \frac{1}{3c^{1/3}x^{2/3}} \times \lambda e^{-\lambda \left(\frac{x}{c}\right)^{1/3}}.$$

3. (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[P] &= c\mathbb{E}[V^3] \\ &= c \int_0^{+\infty} v^3 f_V(v) dv \quad (\text{théorème de transfert}) \\ &= c \int_0^{+\infty} v^3 \lambda e^{-\lambda v} dv \\ &= c\lambda \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\lambda v} dv \\ &= c\lambda I_3 \\ &= c\lambda \times \frac{3}{\lambda} I_2 \quad (\text{admis dans l'énoncé}) \\ &= c\lambda \times \frac{3}{\lambda} \times \frac{2}{\lambda} I_1 \quad (\text{admis dans l'énoncé}) \\ &= c\lambda \times \frac{3}{\lambda} \times \frac{2}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} I_0 \quad (\text{admis dans l'énoncé}) \\ &= c\lambda \times \frac{3}{\lambda} \times \frac{2}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} \quad (\text{admis dans l'énoncé}) \\ &= \frac{6c}{\lambda^3}.\end{aligned}$$

(b) Pour  $\lambda = 0.05\text{h/km}$  et  $c \approx 64.7 \text{ W}/(\text{km/h})^3$  :

$$\mathbb{E}[P] \approx \frac{6 \times 64.7}{(0.05)^3} \approx 3.1 \times 10^6 \text{ W} \approx 3.1 \text{ MW}.$$

Un four micro-ondes a une puissance d'environ 1 kW, donc la puissance moyenne récupérable par l'éolienne correspond à la puissance de 3100 micro-ondes fonctionnant simultanément.

Un réacteur nucléaire a une puissance d'environ 1 GW. Dans le cas de l'éolienne et des conditions de vent décrites ici, la puissance maximum récupérable d'environ 300 éoliennes correspondent à la puissance d'un réacteur nucléaire.

## Bonus

On considère un jeu de pile ou face répété. Le gain initial du joueur est de 1 euro. À chaque fois que le joueur obtient pile, son gain est multiplié par 2. Dès qu'il obtient face, le jeu s'arrête et remporte le gain.

On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au gain du joueur à la fin du jeu. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2^k) &= \mathbb{P}(\text{"le joueur obtient pile } k \text{ fois de suite, puis face"}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty.$$