Correction – Interro 1

1. **Définition d'une mesure de probabilité**

   Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une **mesure de probabilité** est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que :

   (a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

   (b) Pour toute suite dénombrable d'événements $E_1, E_2, \ldots$ disjoints deux à deux dans $\mathcal{A}$:
   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

2. **Booster Pokémon**

   (a) **Avec remise**
   Chaque carte est tirée indépendamment parmi 100 cartes équiprobables.
   On a $\tilde{\Omega} = \{1, 2, \ldots, 100\}^{10}$, et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\tilde{\Omega})$.
   On cherche la probabilité de l'événement $E = \{\text{toutes les cartes sont différentes}\}$.
   $|\tilde{\Omega}| = 100^{10}$, et $|E| = 100 \times 99 \times \cdots \times 91$.
   Donc $\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\tilde{\Omega}|} = \frac{100\times 99 \times\cdots\times 91}{100^{10}} = \frac{100}{100} \times \frac{99}{100} \times \cdots \times \frac{91}{100}$.

   (b) **Sans remise**
   Cette fois, on suppose qu'il n'y a pas de répétition. On est dans le cas d'un arrangement de 10 éléments pris parmi 100 (tirage avec ordre et sans remise).
   Le nombre de boosters différents possibles est égal à
   $$A_{100}^{10} = 100 \times 99 \times \cdots \times 91 = \frac{100!}{(100-10)!}.$$

   (c) **Probabilité conjointe**
   On suppose qu'il n'y a pas de répétition et équiprobabilité entre les boosters. On note désormais Ω l'ensemble des boosters sans répétition. Notons : $F = \{\text{la première carte est de type Feu}\}$ et $D = \{\text{la dernière carte est Pikachu}\}$.
   On cherche $\mathbb{P}(F \cap D) = \frac{|F\cap D|}{|\Omega|}$.
   $|\Omega| = A_{10}^{100} = 100 \times 99 \times \cdots \times 91$.
   $|F \cap D|$ correspond au nombre de boosters dont la première carte est de type Feu et la dernière carte est Pikachu. Il y a 25 cartes de type Feu donc 25 choix pour la première carte, 1 choix pour la dernière carte (Pikachu), et ensuite un arrangement de 8 éléments pris parmi les 98 cartes restantes, soit $A_8^{98} = 98 \times 97 \times \cdots \times 91$. Donc $|F \cap D| = 25 \times A_8^{98} = 25 \times 98 \times 97 \times \cdots \times 91$.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(F \cap D) = \frac{|F \cap D|}{|\Omega|} = \frac{25 \times 98 \times 97 \times \cdots \times 91}{100 \times 99 \times \cdots \times 91} = \frac{25}{100 \times 99}.$$

(d) **Probabilité conditionnelle**

On cherche $\mathbb{P}(F \mid D) = \frac{\mathbb{P}(F \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(F \cap D)}{|D|/|\Omega|}$.

$|D|$ correspond au nombre de boosters dont la dernière carte est Pikachu. C'est un arrangement de 9 éléments pris parmi les 99 cartes restantes, soit $A_9^{99} = 99 \times 98 \times \cdots \times 91$.

Donc

$$\mathbb{P}(F \mid D) = \frac{\mathbb{P}(F \cap D)}{|D|/|\Omega|} = \frac{\frac{25}{100 \times 99}}{\frac{99 \times 98 \times \cdots \times 91}{100 \times 99 \times \cdots \times 91}} = \frac{\frac{25}{100 \times 99}}{\frac{1}{100}} = \frac{25}{99}.$$