

Correction – Interro 2

1. Définition d'une densité

On dit qu'une variable aléatoire réelle X admet une **densité de probabilité** s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx < +\infty$,
- pour tout $a < b$, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$.

La fonction f_X est appelée **densité** de X .

2. Vecteur gaussien

(a) Valeur de u

Une matrice de variance-covariance est toujours **symétrique**. Donc $u = 0.5$.

(b) Espérance de $X_1 + 2X_2$

On utilise la linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_1 + 2X_2) = \mathbb{E}(X_1) + 2\mathbb{E}(X_2).$$

Or

$$\mathbb{E}(X_1) = 3.6, \quad \mathbb{E}(X_2) = 1.2.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X_1 + 2X_2) = 3.6 + 2 \times 1.2 = 3.6 + 2.4 = 6.$$

(c) Variance de $X_1 + 2X_2$

On utilise les formules suivantes :

- $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$,
- $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_1 + 2X_2) &= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(2X_2) + 2 \text{Cov}(X_1, 2X_2) \\ &= \mathbb{V}(X_1) + 2^2\mathbb{V}(X_2) + 2 \times 2 \text{Cov}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{V}(X_1) = 1, \quad \mathbb{V}(X_2) = 2, \quad \text{Cov}(X_1, X_2) = 0.5.$$

Donc

$$\mathbb{V}(X_1 + 2X_2) = 1 + 4 \times 2 + 4 \times 0.5 = 1 + 8 + 2 = 11.$$

3. Jeu de pile ou face

(a) **Espérance de Z**

On a

$$Z = g^Y.$$

Donc, d'après le théorème de transfert avec la fonction $h : k \mapsto g^k$:

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(h(Y)) = \sum_{k=0}^n h(k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^n g^k \mathbb{P}(Y = k).$$

Or

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^n g^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (gp)^k (1-p)^{n-k}.$$

On reconnaît la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = (gp + 1 - p)^n}.$$

(b) **Condition sur g**

On veut

$$(gp + 1 - p)^n > x.$$

On procède par équivalence :

$$\begin{aligned} (gp + 1 - p)^n > x &\iff gp + 1 - p > x^{\frac{1}{n}} \\ &\iff gp > x^{\frac{1}{n}} - 1 + p \\ &\iff g > \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1 + p}{p}. \end{aligned}$$

Application numérique

$$n = 10, \quad p = 0.4, \quad x = 64.$$

On obtient

$$g > \frac{64^{\frac{1}{10}} - 1 + 0.4}{0.4}$$

Soit environ

$$\boxed{g \gtrsim 2.289}.$$