Interro n°2 : Probabilités, modélisation et statistique

Polytech Montpellier – DevOps3 – Semestre 6

Année 2025–2026 – 20 mars 2026

Durée : 25 minutes — Aucun document autorisé

Les réponses doivent être justifiées et on attachera une attention particulière à la clarté des réponses.

---

1. Rappeler la définition de la densité d'une variable aléatoire : "*on dit qu'une variable aléatoire X admet une densité de probabilité si [...]*".

2. Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de moyenne $\begin{pmatrix} 3.6 \\ 1.2 \end{pmatrix}$ et de matrice de variance-covariance $\begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 \\ u & 2.0 \end{pmatrix}$.

   (a) Que vaut u ? *(Comme toujours, justifier.)*
   (b) Calculer l'espérance de $X_1 + 2X_2$.
   (c) Calculer la variance de $X_1 + 2X_2$.

3. On s'intéresse à un jeu de pile ou face truqué, de probabilité $p \in [0, 1]$ d'avoir pile, et répété $n \in \mathbb{N}^*$ fois.
   On considère une variable aléatoire Y qui suit une loi binomiale de paramètres n et p comptant le nombre de pile.
   Le gain initial est de 1. Il est multiplié par $g \in \mathbb{R}$ à chaque fois que l'on obtient pile. Notons Z le gain final. On remarque que $Z = g^Y$. *On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.*

   (a) Calculer l'espérance de Z.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de g l'espérance de Z est-elle supérieure à x ? On prendra $n = 10$, $p = 0.4$ et $x = 64 = 4^3$ pour l'application numérique, après avoir une expression littérale simplifiée.

Interro n°2 : Probabilités, modélisation et statistique

Polytech Montpellier – DevOps3 – Semestre 6

Année 2025–2026 – 20 mars 2026

Durée : 25 minutes — Aucun document autorisé

Les réponses doivent être justifiées et on attachera une attention particulière à la clarté des réponses.

---

1. Rappeler la définition de la densité d'une variable aléatoire : "*on dit qu'une variable aléatoire X admet une densité de probabilité si [...]*".

2. Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de moyenne $\begin{pmatrix} 3.6 \\ 1.2 \end{pmatrix}$ et de matrice de variance-covariance $\begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 \\ u & 2.0 \end{pmatrix}$.

   (a) Que vaut u ? *(Comme toujours, justifier.)*
   (b) Calculer l'espérance de $X_1 + 2X_2$.
   (c) Calculer la variance de $X_1 + 2X_2$.

3. On s'intéresse à un jeu de pile ou face truqué, de probabilité $p \in [0, 1]$ d'avoir pile, et répété $n \in \mathbb{N}^*$ fois.
   On considère une variable aléatoire Y qui suit une loi binomiale de paramètres n et p comptant le nombre de pile.
   Le gain initial est de 1. Il est multiplié par $g \in \mathbb{R}$ à chaque fois que l'on obtient pile. Notons Z le gain final. On remarque que $Z = g^Y$. *On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.*

   (a) Calculer l'espérance de Z.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de g l'espérance de Z est-elle supérieure à x ? On prendra $n = 10$, $p = 0.4$ et $x = 64 = 4^3$ pour l'application numérique, après avoir une expression littérale simplifiée.