

Correction – Interro 3

1. **Loi faible des grands nombres** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, admettant une espérance μ . Alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu$$

2. **Estimateur de a**

(a) **Biais**

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{a}_n) &= \mathbb{E}(\hat{a}_n) - a \quad (\text{définition du biais}) \\ &= \mathbb{E}(2\bar{X}_n - b) - a \quad (\text{définition de } \hat{a}_n) \\ &= 2\mathbb{E}(\bar{X}_n) - b - a \quad (\text{linéarité de l'espérance}) \\ &= 2\mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) - b - a \quad (\text{définition de } \bar{X}_n) \\ &= 2\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) - b - a \quad (\text{linéarité de l'espérance}) \\ &= 2n\frac{1}{n}\mathbb{E}(X) - b - a \quad (X_i \text{ de même loi que } X) \\ &= 2\mathbb{E}(X) - b - a \\ &= 2\frac{a+b}{2} - b - a \quad (\text{espérance de la loi uniforme}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'estimateur est donc **sans biais**.

(b) **Variance**

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\hat{a}_n) &= \mathbb{V}(2\bar{X}_n - b) \quad (\text{définition de } \hat{a}_n) \\
&= 2^2 \times \mathbb{V}(\bar{X}_n) \quad (\text{propriété de la variance}) \\
&= 4\mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\
&= 4 \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \quad (\text{propriété de la variance}) \\
&= 4 \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) \quad (\text{indépendance des } X_i) \\
&= 4 \frac{1}{n^2} n \mathbb{V}(X) \quad (X_i \text{ i.i.d.}) \\
&= 4 \frac{1}{n} \mathbb{V}(X) \\
&= 4 \frac{1}{n} \frac{(b-a)^2}{12} \quad (\text{variance de la loi uniforme}) \\
&= \frac{(b-a)^2}{3n}.
\end{aligned}$$

(c) **Erreur quadratique moyenne**

On rappelle

$$\text{EQM}(\hat{a}_n) = \mathbb{V}(\hat{a}_n) + (\text{biais})^2.$$

D'après les questions précédentes, on a :

$$\text{EQM}(\hat{a}_n) = \frac{(b-a)^2}{3n} + 0^2 = \frac{(b-a)^2}{3n}.$$

(d) **Théorème central limite**

Le théorème central limite donne :

$$\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}/\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Or $\bar{X}_n = \frac{\hat{a}_n + b}{2}$, $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Donc

$$\frac{\frac{\hat{a}_n + b}{2} - \frac{a+b}{2}}{\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}/\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Ou en simplifiant :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} \frac{\frac{\hat{a}_n - a}{2}}{\frac{b-a}{\sqrt{12}}} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \\
\sqrt{3n} \frac{\hat{a}_n - a}{b-a} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).
\end{aligned}$$

On peut multiplier par $\frac{b-a}{\sqrt{3}}$ puis ajouter a pour obtenir :

$$\sqrt{n} \hat{a}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(a, \frac{(b-a)^2}{3} \right).$$

Ainsi, pour n grand,

$$\hat{a}_n \approx \mathcal{N} \left(a, \frac{(b-a)^2}{3n} \right).$$

On observe que la variance tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$: l'estimateur est donc **consistant**.