**Interro n°3 :** Probabilités, modélisation et statistique

Polytech Montpellier – DevOps3 – Semestre 6

Année 2025–2026 – 24 mars 2026

Durée : 25 minutes — Aucun document autorisé

*Les réponses doivent être justifiées et on attachera une attention particulière à la clarté des réponses.*

---

1. Rappeler l'énoncé de la loi faible des grands nombres.

2. Soit $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ avec $b$ connu. On considère un échantillon $X_1$, ..., $X_n$ de $n$ v.a. i.i.d. de même loi que $X$. On propose l'estimateur $\hat{a}_n = 2\bar{X}_n - b$ pour estimer $a$.
On rappelle que :

   - La densité de $X$ est donnée par $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   - L'espérance de $X$ est donnée par $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.
   - La variance de $X$ est donnée par $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

   (a) Calculer le biais de l'estimateur $\hat{a}_n$.

   (b) Calculer la variance de l'estimateur $\hat{a}_n$.

   (c) En déduire l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur $\hat{a}_n$.

   (d) Appliquer le théorème central limite dans le cas de cet estimateur $\hat{a}_n$, et commenter.


**Interro n°3 :** Probabilités, modélisation et statistique

Polytech Montpellier – DevOps3 – Semestre 6

Année 2025–2026 – 24 mars 2026

Durée : 25 minutes — Aucun document autorisé

*Les réponses doivent être justifiées et on attachera une attention particulière à la clarté des réponses.*

---

1. Rappeler l'énoncé de la loi faible des grands nombres.

2. Soit $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ avec $b$ connu. On considère un échantillon $X_1$, ..., $X_n$ de $n$ v.a. i.i.d. de même loi que $X$. On propose l'estimateur $\hat{a}_n = 2\bar{X}_n - b$ pour estimer $a$.
On rappelle que :

   - La densité de $X$ est donnée par $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   - L'espérance de $X$ est donnée par $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.
   - La variance de $X$ est donnée par $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

   (a) Calculer le biais de l'estimateur $\hat{a}_n$.

   (b) Calculer la variance de l'estimateur $\hat{a}_n$.

   (c) En déduire l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur $\hat{a}_n$.

   (d) Appliquer le théorème central limite dans le cas de cet estimateur $\hat{a}_n$, et commenter.